# نظریه بازی‌ها و کدهای الفبایی

تألیف

مجید مزروعی

عضو هیأت علمی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه کاشان

# فصل ۱

# مقدمات

در این فصل کوتاه مروری مختصر بر مفاهیم اولیه خواهیم داشت. این مفاهیم، که بیشتر برگرفته از جبر خطی هستند، در فصول آتی مورد استفاده خواهند بود.

## ۱-۱ کدها

فرض کنید $A$ یک مجموعه ناتهی (به نام مجموعه الفبا) و $A^n$ نشان‌دهنده همه کلمات با طول $n$ روی مجموعه $A$ است. پس داریم:

$$\begin{aligned} A^1 &= A, \\ A^2 &= \{x_1x_2 \mid x_1, x_2 \in A\}, \\ A^3 &= \{x_1x_2x_3 \mid x_1, x_2, x_3 \in A\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

قرار دهید:

$$\Sigma(A) = \bigcup_{n\geq 1} A^n$$

**تعریف ۱-۱.** هر زیرمجموعه ناتهی از $\Sigma(A)$ را یک کد روی الفبای $A$ گوییم. ▲

فرض کنید $C$ یک کد روی الفبای $A$ است. هر عنصر از $C$ را یک کدکلمه می‌نامیم.

هرگاه تمام کدکلمات در $C$ دارای طول یکسان $n$ باشند آنگاه $C$ را یک کد بلوکی با طول $n$ می‌خوانیم.

**مثال ۱-۲.** فرض کنید $A = \{a, b, c\}$. در این صورت $C = \{abb, bab, bbc, ccc, aca, aac\}$ یک کد بلوکی با طول ۳ روی الفبای $A$ است. ▲

**تعریف ۱-۳.** فرض کنید $C$ یک کد بلوکی با طول $n$ روی الفبای $q$-عضوی $A$ است. در این صورت عدد $k = \log_q |C|$ را بعد کد $C$ نامیده و آن را با نماد $\dim_A(C)$ نشان می‌دهیم. ▲

فرض کنید $x = x_1 \cdots x_n$ و $y = y_1 \cdots y_n$ دو کلمه با طول $n$ روی الفبای $A$ هستند. فاصله (همینگ) این دو کلمه را با نماد $d(x, y)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(x, y) = |\{i \ : \ x_i \neq y_i\}|.$$

**تعریف ۱-۴.** برای هر کد بلوکی $C$ روی الفبای $A$، کمترین فاصله $C$ را با $d(C)$ نشان داده و برابر با

$$\min\{d(x, y) \mid x, y \in C, \ x \neq y\},$$

تعریف می‌کنیم. ▲

**مثال ۱-۵.** کمترین فاصله کد $C$ در مثال قبل برابر با ۲ است. ▲

یکی از مهم‌ترین رده کدهای بلوکی، کدهای خطی است. این کدها با داشتن ساختاری ساده قدرت ویژه‌ای در مسائل کاربردی دارند.

**تعریف ۱-۶.** فرض کنید $F_q$ یک میدان $q$-عضوی و $C \subseteq F_q^n$ یک فضای برداری روی میدان $F_q$ است. در این صورت $C$ را یک کد خطی $q$-تایی با طول $n$ روی میدان $F_q$ می‌نامیم. به ویژه، اگر $\dim(C) = k$ و $d(C) = d$ آنگاه گوییم $C$ یک $[n, k, d]$-کد خطی روی میدان $F_q$ است. ▲

می‌دانیم که هرگاه $C$ یک فضای برداری با بعد $k$ روی میدان $F_q$ باشد آنگاه $C$ دارای یک پایه $k$ عضوی است و هر کدکلمه از $C$ را می‌توان به شکلی منحصربفرد به صورت

یک ترکیب خطی از عناصر این پایه نوشت. به این ترتیب برای معرفی یک کد خطی تنها نیازمند معرفی پایه کد هستیم. این امر ما را در ارایه یک فرم ساده برای کد یاری می‌رساند. برای این منظور، فرض کنید $G$ ماتریسی است $k \times n$ که سطرهای آن از عناصر پایه کد $C$ تشکیل شده است. در این صورت خواهیم داشت:

$$C = \{xG \mid x \in F_q^k\}.$$

ماتریس $G$ را یک ماتریس مولد برای کد $C$ می‌نامیم. بدیهی است که هر کد خطی دارای ماتریس‌های مولد متعد است.

**مثال ۱-۷.** $C = \{۰۰۰, ۰۰۱, ۰۱۰, ۰۱۱, ۱۰۰, ۱۰۱, ۱۱۰, ۱۱۱\}$ یک کد خطی با طول ۳ روی میدان $F_۲$ است. به سادگی می‌توان دید که

$$G = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

یک ماتریس مولد برای $C$ است.

به عنوان مثالی دیگر، $C = \{۰۰۰۰, ۱۱۰۰, ۲۲۰۰, ۰۰۰۱, ۰۰۰۲, ۱۱۰۱, ۱۱۰۲, ۲۲۰۱, ۲۲۰۱\}$ یک کد خطی روی میدان $F_۳$ با بعد ۲ است. همچنین $G = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ یک ماتریس مولد برای کد $C$ است. ▲

فرض کنید $C$ یک کد خطی با بعد $k$ روی میدان $F_q$ و $C^\perp$ دوگان کد $C$ است، یعنی

$$C^\perp = \{x \in F_q^n \mid \forall c \in C, \ < x, c >= ۰\},$$

که در این جا $< x, y > := \sum_{i=۱}^{n} x_i y_i \in F_q$ نشان‌دهنده ضرب داخلی اقلیدسی روی فضای برداری $F_q^n$ است. به سادگی می‌توان دید که $C^\perp$ نیز یک کد خطی روی میدان $F_q$ با بعد $n - k$ است. هرگاه $H$ یک ماتریس مولد برای کد $C^\perp$ باشد آنگاه $H$ را یک ماتریس کنترل تساوی برای کد $C$ می‌نامیم. دقت کنید که با توجه به تعریف، اگر $G$ یک ماتریس مولد و $H$ یک ماتریس کنترل تساوی برای کد $C$ باشند آنگاه $GH^T = ۰$. پس می‌توان گفت $x \in F_q^n$ یک کدکلمه از $C$ است اگر و تنها اگر $xH^T = ۰$.

**مثال ۱-۸.** کد خطی $C = \{000, 001, 002, 010, 020, 011, 012, 021, 022\}$ را روی میدان $F_3$ در نظر بگیرید. در این صورت $C^{\perp} = \{000, 100, 200\}$ و $H = [1\ 0\ 0]$ یک ماتریس کنترل تساوی برای کد $C$ است. ▲

یک روش ساده برای محاسبه کمترین فاصله کدهای خطی استفاده از مفهوم وزن همینگ است. فرض کنید $x \in F_q^n$. در این صورت وزن همینگ $x$ را با $\mathrm{wt}(x)$ نشان داده و برابر با تعداد مؤلفه‌های ناصفر $x$ تعریف می‌کنیم. به سادگی می‌توان دید که هرگاه $x, y \in F_q^n$ آنگاه $d(x, y) = \mathrm{wt}(x - y)$. به این ترتیب، کمترین فاصله کد خطی $C$ برابر است با کمترین وزن کلمات ناصفر $C$.

با استفاده از ماتریس کنترل تساوی می‌توان کمترین فاصله یک کد خطی را محاسبه نمود.

**قضیه ۱-۹.** فرض کنید $C$ یک کد خطی با ماتریس کنترل تساوی $H$ است. در این صورت $d(C) = d$ اگر و تنها اگر هر $d - 1$ ستون از ماتریس $H$ مستقل خطی بوده و $d$ ستون از $H$ موجود باشند به طوری که روی میدان $F_q$ وابسته خطی هستند.

**مثال ۱-۱۰.** فرض کنید $C$ کد خطی روی میدان $F_2$ با ماتریس کنترل تساوی

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

است. به سادگی می‌توان دید که هر دو ستون از $H$ مستقل خطی هستند در حالی که ستون‌های ۱، ۳ و ۴ یک مجموعه وابسته خطی روی میدان $F_2$ تشکیل می‌دهند. پس کد $C$ دارای کمترین فاصله ۲ است. ▲

## ۱-۲ کدگذاری با استفاده از کدهای خطی

فرض کنید $C$ یک کد خطی با بعد $k$ و ماتریس مولد $G$ روی میدان $F_q$ است. در این صورت $C$ دارای $q^k$ کدکلمه است و می‌توان از کد $C$ برای ارسال اطلاعات یک منبع با حداکثر $q^k$ سمبل استفاده کرد. به بیان دیگر، اگر هر سمبل از منبع مورد نظر را با یک کلمه منحصربفرد از فضای برداری $F_q^k$ نشانه‌گذاری کنیم، آنگاه با استفاده از تبدیل $u \mapsto uG$ می‌توان هر کلمه $u \in F_q^k$ را به یک کدکلمه منحصربفرد نظیر کرد. این فرآیند را

کدگذاری با استفاده از کد $C$ می‌نامند.

**مثال ۱-۱۱.** فرض کنید $C$ کد خطی دودویی با ماتریس مولد

$$G = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix},$$

است. در این صورت، با استفاده از کد $C$، کلمه $u = ۱۰۱$ به کلمه $uG = ۱۰۰۱۱$ کدگذاری خواهد شد. ▲

## ۱-۳ کدگشایی کدهای خطی

یکی از مفاهیم اساسی در نظریه کدگذاری، مفهوم کدگشایی است. برای دستیابی به این مفاهیم لازم است ابتدا با مفاهیم کشف خطا و تصحیح خطا آشنا شویم. پیش از هر چیز دقت کنید که هرگاه $C$ یک کد بلوکی (نه لزوماً خطی) روی میدان $F_q$ باشد آنگاه هر کدکلمه $c \in C$ از طریق یک کانال ارتباطی (مانند یک رشته سیم، یک ماهواره، یک میکروفون و یا هر وسیله ارتباطی دیگر) برای گیرنده ارسال می‌شود. در طی فرآیند ارسال، معمولاً (به دلایلی همچون گرما، بعد مسافت، مواد نامرغوب و ...) خطایی در کلمه ارسال شده $c$ رخ داده و کلمه‌ای همچون $w \in F_q^n$ (که لزوماً یک کدکلمه نخواهد بود) دریافت می‌شود. به بیان ریاضی، می‌توان این پدیده را این گونه بیان کرد که برداری مانند $u \in F_q^n$ بر کدکلمه $c$ اثر نموده و کلمه $w = c + u$ دریافت می‌شود. این بردار $u$ را بردار خطا می‌نامند. مسأله کدگشایی برای یک کد $C$ در حقیقت ارایه الگوریتمی مؤثر برای کشف و تصحیح چنین خطاهایی است به گونه‌ای که کلمه دریافتی $w$ با اطمینان بالا به کلمه ارسال شده اصلی کدگشایی شود.

**تعریف ۱-۱۲.** گوییم کد $C$ بردار خطای $u$ را کشف می‌کند هرگاه برای هر $c \in C$، $u + c \notin C$. ▲

**مثال ۱-۱۳.** کد $C = \{۰۰۱, ۱۰۱, ۱۱۰\}$ را در نظر بگیرید. برای بردار $u = ۰۱۰ \in F_۲^۳$ داریم:

$$u + C = \{u + c \mid c \in C\} = \{۰۱۱, ۱۱۱, ۱۰۰\}.$$

پس $u + C \cap C = \emptyset$ که نشان می‌دهد کد $C$ می‌تواند بردار خطای $u = ۰۱۰$ را کشف کند. از سوی دیگر می‌توان دید که بردار خطای $v = ۱۰۰$ برای کد $C$ قابل کشف نیست زیرا $۱۰۰ + ۰۰۱ = ۱۰۱ \in C$. ▲

جالب است بدانید میان کمترین فاصله یک کد و توانایی کشف خطا رابطه مستقیمی وجود دارد.

**قضیه ۱-۱۴.** فرض کنید $C$ یک کد روی میدان $F_q$ با کمترین فاصله $d$ است. در این صورت $C$ هر بردار خطا با وزن حداکثر $d - ۱$ را شناسایی می‌کند. به علاوه برداری با وزن $d$ وجود دارد که برای کد $C$ قابل کشف نیست.

اکنون این پرسش طبیعی مطرح است که آیا پس از کشف بروز خطا در یک کلمه ارسالی می‌توان به کلمه اصلی دست یافت؟ برای پاسخ به این پرسش اجازه دهید ابتدا الگوریتم کدگشایی بیشترین درستنمایی (MLD) را معرفی کنیم.

**الگوریتم کدگشایی بیشترین درستنمایی.** فرض کنید $C$ یک کد روی میدان $F_q$ با طول $n$ و کمترین فاصله $d$ است. به علاوه فرض کنید $w$ یک کلمه دریافتی است. اکنون کلمه‌ای مانند $c \in C$ بیابید به طوری که برای هر کدکلمه $c' \in C$ داشته باشیم $d(c, w) \leq d(c', w)$. در این صورت $w$ را به کدکلمه $c$ کدگشایی می‌کنیم.

به بیان دیگر، در روش کدگشایی بیشترین درستنمایی کلمه $w$ به نزدیک‌ترین کدکلمه به $w$ کدگشایی می‌شود. این نیز معادل با آن است که کلمه $w - c$ دارای کمترین وزن ممکن باشد.

دقت کنید که در الگوریتم MLD برای یک کلمه دریافتی $w$ ممکن است چندین کلمه $c \in C$ با خصوصیت یاد شده یافت شوند. در این صورت می‌توان از فرستنده تقاضا کرد تا کلمه اصلی را بار دیگر ارسال کند (الگوریتم بیشترین درستنمایی ناقص یا IMLD) هر چند در عمل کلمه $w$ به یکی از این کدکلمات یافت شده کدگشایی می‌شود (الگوریتم بیشترین درستنمایی کامل یا CMLD).

**مثال ۱-۱۵.** کد $C = \{۰۰۰۰, ۱۰۱۰, ۰۱۱۱\}$ را در نظر بگیرید. در جدول زیر الگوریتم IMLD را برای این کد مشاهده می‌کنید.

| کلمه کدگشایی شده $c$ | $w$+۰۱۱۱۰ | $w$+۱۰۱۰۰ | $w$+۰۰۰۰۰ | کلمه دریافت شده $w$ |
|---|---|---|---|---|
| ۰۰۰۰ | ۰۱۱۱ | ۱۰۱۰ | ۰۰۰۰ | ۰۰۰۰ |
| – | ۱۱۱۱ | ۰۰۱۰ | ۱۰۰۰ | ۱۰۰۰ |
| ۰۰۰۰ | ۰۰۱۱ | ۱۱۱۰ | ۰۱۰۰ | ۰۱۰۰ |
| – | ۰۱۰۱ | ۱۰۰۰ | ۰۰۱۰ | ۰۰۱۰ |
| ۰۰۰۰ | ۰۱۱۰ | ۱۰۱۱ | ۰۰۰۱ | ۰۰۰۱ |
| – | ۱۰۱۱ | ۰۱۱۰ | ۱۱۰۰ | ۱۱۰۰ |
| ۱۰۱۰ | ۱۱۰۱ | ۰۰۰۰ | ۱۰۱۰ | ۱۰۱۰ |
| – | ۱۱۱۰ | ۰۰۱۱ | ۱۰۰۱ | ۱۰۰۱ |
| ۰۱۱۱ | ۰۰۰۱ | ۱۱۰۰ | ۰۱۱۰ | ۰۱۱۰ |
| ۰۱۱۱ | ۰۰۱۰ | ۱۱۱۱ | ۰۱۰۱ | ۰۱۰۱ |
| ۰۱۱۱ | ۰۱۰۰ | ۱۰۰۱ | ۰۰۱۱ | ۰۰۱۱ |
| ۱۰۱۰ | ۱۰۰۱ | ۰۱۰۰ | ۱۱۱۰ | ۱۱۱۰ |
| ۰۱۱۱ | ۱۰۱۰ | ۰۱۱۱ | ۱۱۰۱ | ۱۱۰۱ |
| ۱۰۱۰ | ۱۱۰۰ | ۰۰۰۱ | ۱۰۱۱ | ۱۰۱۱ |
| ۰۱۱۱ | ۰۰۰۰ | ۱۱۰۱ | ۰۱۱۱ | ۰۱۱۱ |
| ۰۱۱۱ | ۱۰۰۰ | ۰۱۰۱ | ۱۱۱۱ | ۱۱۱۱ |

▲

**تعریف ۱-۱۶.** گوییم کد $C$ بردار خطای $u$ را تصحیح می‌کند هرگاه برای هر $c, c' \in C$ داشته باشیم:

$$d(c, c+u) \leq d(c', c+u).$$

▲

به بیان دیگر، اگر کد $C$ قادر به تصحیح خطای $u$ باشد آنگاه در الگوریتم کدگشایی بیشترین درستنمایی، برای هر $c \in C$، کلمه دریافتی $c+u$ به درستی به $c$ کدگشایی می‌شود. همچون بحث کشف خطا، تصحیح خطا نیز ارتباط نزدیکی با کمترین فاصله کد دارد.

**قضیه ۱-۱۷.** فرض کنید $C$ یک کد روی میدان $F_q$ با کمترین فاصله $d$ است. در این صورت $C$ هر بردار خطا با وزن حداکثر $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ را تصحیح می‌کند.

الگوریتم MLD برای کدهای خطی دارای فرم ساده‌تر و کاربردی‌تری است. برای آشنایی با این فرم ابتدا به تعریف هم‌دسته نیازمندیم.

**تعریف ۱-۱۸.** فرض کنید $C$ یک کد خطی با طول $n$ روی میدان $F_q$ است. برای هر بردار $u \in F_q^n$، هم‌دسته $C$ متناظر با $u$ را با نماد $u + C$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u + C = \{u + c \mid c \in C\}.$$

▲

با توجه به تعریف، بدیهی است که برای هر دو بردار $u, v \in F_q^n$، $u + C = v + C$ اگر و تنها اگر $u - v \in C$. بردار $u$ را یک نماینده برای هم‌دسته $u + C$ می‌نامیم. دقت کنید که نماینده هم‌دسته یکتا نیست. قضیه زیر نیز به سادگی از تعریف حاصل می‌شود.

**قضیه ۱-۱۹.** فرض کنید $C$ یک کد خطی با طول $n$ و بعد $k$ روی میدان $F_q$ است.
الف) هر بردار از $F_q^n$ در یک و تنها یک هم‌دسته از $C$ قرار دارد.
ب) برای هر $u \in F_q^n$ داریم $|u + C| = |C| = q^k$.
ج) تعداد هم‌دسته‌های متمایز $C$ برابر با $q^{n-k}$ است.

**تعریف ۱-۲۰.** یک کلمه با کمترین وزن در یک هم‌دسته از کد $C$ را یک پیشرو برای آن هم‌دسته می‌نامیم. ▲

اکنون آماده‌ایم تا یک مفهوم کلیدی در کدگشایی کدهای خطی را معرفی کنیم.

**تعریف ۱-۲۱.** فرض کنید $C$ یک $[n, k, d]$-کد خطی روی میدان $F_q$ و $H$ یک ماتریس کنترل تساوی برای $C$ است. برای هر کلمه $x \in F_q^n$، نشانگان $x$ را با نماد $S(x)$ نشان داده و برابر با $xH^T$ تعریف می‌کنیم. ▲

دقت کنید که نشانگان هر بردار وابسته به ماتریس کنترل تساوی انتخاب شده است و با تغییر این ماتریس، بردار نشانگان هم تغییر خواهد کرد.

**قضیه ۱-۲۲.** فرض کنید $C$ یک $[n,k,d]$-کد خطی روی میدان $F_q$ و $H$ یک ماتریس کنترل تساوی برای $C$ است. در این صورت برای هر $x,y \in F_q^n$ داریم: الف) $S(x+y)=S(x)+S(y)$.
ب) $S(x)=0$ اگر و تنها اگر $x \in C$.
ج) $S(x)=S(y)$ اگر و تنها اگر $x$ و $y$ در یک هم‌دسته از $C$ قرار داشته باشند.

اکنون فرض کنید جدولی با دو ستون تشکیل داده‌اید که ستون سمت چپ آن پیشروهای هم‌دسته‌های $C$ و ستون سمت راست آن نشانگان متناظر با هر پیشرو را در خود جای داده است. چنین جدولی را جدول نشانگان کد $C$ می‌نامیم. اکنون برای هر کلمه دریافتی $w$، ابتدا $S(w)$ را محاسبه نموده سپس در ستون راست جدول نشانگان $C$، بردار $S(w)$ را می‌یابیم. هرگاه این بردار متناظر با پیشرویی مانند $u$ باشد آنگاه کلمه $w$ به کدکلمه $w-u$ کدگشایی خواهد شد. این روش به الگوریتم کدگشایی نشانگان کدهای خطی موسوم است.

**مثال ۱-۲۳.** فرض کنید $C$ کد خطی دودویی با ماتریس مولد

$$G=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

است. در این صورت پیشروهای هم‌دسته‌های $C$ عبارتند از ۰۰۰۰۰۰، ۱۰۰۰۰۰، ۰۱۰۰۰۰، ۰۰۱۰۰۰، ۰۰۰۱۰۰، ۰۰۰۰۱۰، ۰۰۰۰۰۱ و ۰۰۰۱۰۱. به این ترتیب با انتخاب ماتریس کنترل تساوی

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

برای کد $C$ می‌توان یک جدول نشانگان به صورت زیر تعیین کرد:

| نشانگان پیشرو | پیشرو |
|---|---|
| ۰۰۰ | ۰۰۰۰۰۰ |
| ۱۱۰ | ۱۰۰۰۰۰ |
| ۰۱۱ | ۰۱۰۰۰۰ |
| ۱۱۱ | ۰۰۱۰۰۰ |
| ۱۰۰ | ۰۰۰۱۰۰ |
| ۰۱۰ | ۰۰۰۰۱۰ |
| ۰۰۱ | ۰۰۰۰۰۱ |
| ۱۰۱ | ۰۰۰۱۰۱ |

اکنون با استفاده از این جدول می‌توان به سادگی هر کلمه دریافتی را کدگشایی کرد. ▲

## ۱-۴ برخی از کدهای خطی مهم

در این بخش دو خانواده مهم از کدهای خطی به نام کدهای همینگ و کدهای گلی را معرفی خواهیم کرد.

**تعریف ۱-۲۴.** فرض کنید $r \geq ۲$ یک عدد صحیح مثبت است. می‌دانیم که فضای برداری $F_q^r$ دقیقاً دارای $n = \frac{q^r-۱}{q-۱}$ زیرفضای ۱-بعدی متمایز است. از هر یک از این زیرفضاها یک بردار ناصفر به دلخواه اختیار نموده و آن‌ها را به عنوان ستون‌های یک ماتریس $H$ قرار می‌دهیم. در این صورت کد خطی روی میدان $F_q$ با ماتریس کنترل تساوی $H$ را کد همینگ $q$-تایی نامیده و آن را با نماد $\mathrm{Ham}(r,q)$ نشان می‌دهیم. ▲

دقت کنید که با توجه به تعریف، می‌توان نشان داد $\mathrm{Ham}(r,q)$ یک $[n, n-r, ۳]$-کد خطی است که با تغییر بردارهای انتخاب شده و نیز تغییر ترتیب آن‌ها در ستون‌های $H$، تغییر خواهد کرد. لیکن کدهای حاصل به تعبیری معادل بوده و می‌توان از این نظر کد همینگ را یکتا فرض کرد.

**مثال ۱-۲۵.** یک ماتریس کنترل تساوی برای کد همینگ $\mathrm{Ham}(۳,۲)$ برابر است با

$$H = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

▲

کدهای همینگ از الگوریتم کدگشایی نشانگان ساده‌ای برخوردار هستند. فرض کنید برای هر $۱ \le j \le n$ و هر $b \in F_q$، $e_{j,b}$ نشان‌دهنده برداری با طول $n$ است که در مؤلفه $j$-ام آن عنصر $b$ و در سایر مؤلفه‌هایش صفر قرار دارد. در این صورت می‌توان نشان داد که پیشروها عبارتند از کلمه صفر و همه کلمات به فرم $e_{j,b}$ که $۱ \le j \le n$ و $۰ \neq b \in F_q$. اکنون برای هر بردار دریافت شده مانند $w$، یا $S(w) = ۰$ (که معادل با کدکلمه بودن $w$ است) یا بردار منحصربفردی مانند $e_{j,b}$ وجود خواهد داشت به طوری که $S(w) = S(e_{j,b})$. در این حالت کافی است در بردار $w$، مؤلفه $j$-ام را تغییر داده و آن را به عنصر $b$ تبدیل کرد.

**تعریف ۱-۲۶.** فرض کنید $G$ ماتریسی است از مرتبه ۲۴ × ۱۲ به فرم $G = \left[\begin{array}{c|c} A & I_{۱۲} \end{array}\right]$ که در آن $I_{۱۲}$ ماتریس همانی از مرتبه ۱۲ و $A$ ماتریس مربعی زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

کد خطی دودویی با ماتریس مولد $G$ را کد گلی توسیع‌یافته نامیده و آن را با نماد $G_{۲۴}$ نشان می‌دهند. هرگاه آخرین ستون ماتریس $G$ را حذف کنیم آنگاه کد خطی با ماتریس مولد حاصل را کد گلی نامیده و آن را با $G_{۲۳}$ نمایش می‌دهند. ▲

می‌توان نشان داد که $G_{۲۴}$ دارای بعد ۱۲ و کمترین فاصله ۸ و $G_{۲۳}$ دارای بعد ۱۲ و کمترین فاصله ۷ است. به این ترتیب هر دو کد قابلیت تصحیح حداکثر ۳ خطا را دارند.

# فصل ۲

# نظریه بازی‌های ترکیبیاتی

بازی‌های ترکیبیاتی بازی‌هایی دو نفره‌اند که در آن‌ها از حرکات شانسی و بلوف زدن خبری نیست. این بازی‌ها بر اساس قوانینی مشخص در زمانی متناهی به پایان رسیده و بر اساس همسن قوانین، یک و تنها یکی از دو بازیکن برنده خواهد بود.

شاید بتوان نقطه آغاز نظریه بازی‌های ترکیبیاتی را مقاله بوتون در تحلیل بازی نیم در سال ۱۹۰۲ دانست. کمی بعد، یعنی در سال ۱۹۳۰، اسپراگ و گراندی به صورت مستقل این نظریه را انسجام بخشیده و پس از آن توسط افرادی همچون گای و اسمیت بسط و توسیع یافت. علاوه بر جذابیت طبیعی نهفته در این نظریه، این شاخه با دیگر شاخه‌های ریاضی از جمله گراف، نظریه اعداد، منطق، نظریه شبکه‌ها و نظریه کدگذاری مرتبط شده است. برای آشنایی بهتر با این نظریه، لازم است ابتدا منظور دقیق خود را از یک بازی ترکیبیاتی بیان کنیم.

## ۲-۱ بازی‌های ترکیبیاتی

**تعریف ۲-۲۷**. یک بازی ترکیبیاتی رقابتی دو نفره است که در شرایط زیر صدق می‌کند:
۱) منافع دو بازیکن در تضاد با یکدیگر است.
۲) در بازی یک مجموعه (متناهی) از وضعیت‌ها و یک وضعیت مشخص به نام وضعیت شروع وجود دارد.
۳) بازی دارای مجموعه‌ای از حرکت‌های قانونی است که تعیین می‌کند هر بازیکن در هر وضعیت مجاز به انجام جدام حرکات است.

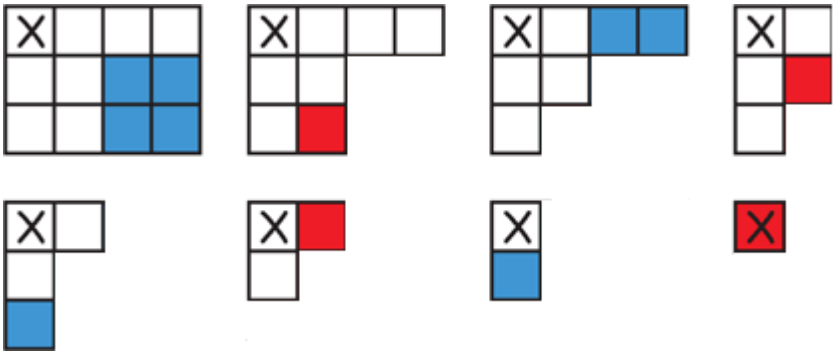
۴) بازیکنان به نوبت حرکت خود را انجام می‌دهند.
۵) بازی پس از تعداد متناهی حرکت به پایان رسیده و بازیکنی که در نوبت خود قادر به تنجام هیچ حرکت قانونی نباشد بازنده (یا برنده!) بازی خواهد بود.
۶) بازی با اطلاعات کامل است و هیچ حرکت پنهانی از سوی هیچ یک از بازیکنان وجود ندارد. ▲

در یک بازی ترکیبیاتی هدف هر بازیکن یافتن راهبردی برای بردن بازی است.

**مثال ۲-۲۸.** در این مثال یک بازی ترکیبیاتی معروف به بازی چمپ را معرفی می‌کنیم. در این بازی یک تخته شکلات مربع-مربع $m \times n$ وجود دارد که مربع بالایی و سمت چپ آن سمی است. بازیکنان در هر نوبت یک مربع را انتخاب نموده و آن قطعه را همراه با همه شکلات‌های سمت راست و پایین آن می‌خورند. در نهایت بازیکنی که مجبور به خوردن شکلات سمی باشد بازنده است.

این بازی را می‌توان روی یک ماتریس $m \times n$ نیز انجام داد به این ترتیب که شکلات سمی در خانه $(۱,۱)$ قرار داشته و هر حرکت قانونی عبارت است از انتخاب درایه‌ای مانند $(a,b)$، $۱ \leq a \leq m$ و $۱ \leq b \leq n$، و حذف همه درایه‌های $(i,j)$ که $i \geq a$ و $j \geq b$.

برای نمونه، این بازی را روی یک صفحه $۴ \times ۳$ نشان می‌دهیم.



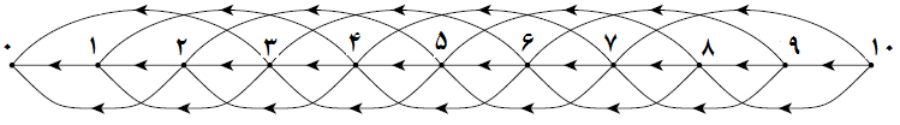
همانطور که می‌بینید، بازیکن ۱ خانه $(۲,۳)$ را انتخاب نموده و پس از آن بازیکن ۲ خانه $(۳,۲)$ را اختیار می‌کند. در حرکت بعد، بازیکن ۱ شکلات $(۱,۳)$ را انتخاب می‌کند و بازیکن ۲ با انتخاب خانه $(۲,۲)$ به آن پاسخ می‌دهد. سرانجام با انتخاب خانه $(۳,۱)$ توسط بازیکن ۱ باخت بازیکن ۲ حتمی خواهد بود. ▲

متناظر با هر بازی ترکیبیاتی می‌توان یک گراف جهت‌دار رسم کرد.

**تعریف ۲-۲۹.** گراف متناظر با یک بازی ترکیبیاتی گرافی است جهت‌دار مانند $G = (V, E)$ که در آن $V$ مجموعه وضعیت‌های بازی است . برای دو رأس $u, v \in V$، $(u, v) \in E$ اگر و تنها اگر بتوان با یک حرکت قانونی از وضعیت $u$ به وضعیت $v$ رسید. به علاوه یک رأس مشخص $v_0$ متناظر با وضعیت شروع بازی در نظر گرفته می‌شود.

برای هر رأس $v$، مجموعه تالی‌های $v$ را با $F(v)$ نشان می‌دهیم. اگر $F(v)$ تهی باشد آنگاه $v$ را یک وضعیت پایانی گوییم. ▲

**مثال ۲-۳۰.** فرض کنید ۲ بازیکن کیسه‌ای شامل ۱۰ مهره در اختیار دارند و قانون بازی به هر یک از آن‌ها اجازه می‌دهد تا در هر حرکت از درون کیسه ۱، ۲ یا ۳ مهره خارج کنند. به این ترتیب خواهیم داشت $F(0) = \emptyset$، $F(1) = \{0\}$، $F(2) = \{0, 1\}$، $F(3) = \{0, 1, 2\}$، $F(4) = \{1, 2, 3\}$ و ... . گراف این بازی را می‌توانید در شکل زیر ببینید.




▲

## ۲-۲ وضعیت‌های $N$ و $P$

در هر بازی ترکیبیاتی، وضعیت‌هایی وجود دارند که بازیکن بعدی (یعنی بازیکنی که نوبت حرکت اوست) می‌تواند با اتخاذ تصمیم‌های درست برد خود را تضمین کند. به این ترتیب در چنین وضعیت‌هایی شانس برد برای بازیکن قبل (که حرکت خود را انجام داده و بازی را به این وضعیت رسانده است) مشروط بر بازی خوب حریف وجود ندارد. به این ترتیب تعریف دقیق زیر را بیان می‌کنیم.

**تعریف ۲-۳۱.** فرض کنید $\mathcal{P}$ مجموعه‌ای از وضعیت‌ها در یک بازی ترکیبیاتی و $\mathcal{N}$ مجموعه مکمل $\mathcal{P}$ باشد که دارای سه خاصیت زیر هستند.

۱) همه وضعیت‌های پایانی در مجموعه $\mathcal{P}$ قرار دارند.

۲) از هر وضعیت در مجموعه $\mathcal{N}$ حداقل یک حرکت قانونی به یک وضعیت در مجموعه $\mathcal{P}$ وجود دارد.

۳) از هر وضعیت در مجموعه $\mathcal{P}$ همه حرکت‌های قانونی به وضعیتی در مجموعه $\mathcal{N}$ منجر می‌شود.

در این صورت هر وضعیت از مجموعه $\mathcal{P}$ را یک وضعیت $P$ و هر وضعیت از مجموعه $\mathcal{N}$ را یک وضعیت $N$ می‌نامیم. ▲

به بیان دیگر می‌توان گفت در گراف یک بازی ترکیبیاتی، رأس $u$ یک وضعیت $P$ است اگر و تنها اگر $F(u) \subseteq \mathcal{N}$ و یک وضعیت $N$ است اگر و تنها اگر $F(u) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$.

با توجه به تعریف بالا، استراتژی برد در یک بازی ترکیبیاتی حرکت به یک وضعیت $P$ است چرا که در این وضعیت‌ها بازیکنی که حرکت خود را انجام داده است می‌تواند با یک بازی مناسب برد خود را تضمین کند.

**مثال ۲-۳۲.** فرض کنید دو بازیکن یک کیسه شامل تعدادی مهره در اختیار دارند و در هر حرکت مجاز به برداشتن ۱، ۳ یا ۴ مهره از درون کیسه هستند. در این صورت می‌توان نشان داد که وضعیت $k$ مهره درون کیسه یک وضعیت $P$ است اگر و تنها اگر باقیمانده $k$ بر ۷ برابر با ۰ یا ۲ باشد. پس استراتژی برد برداشتن تعداد مناسب مهره از درون کیسه است به گونه‌ای که تعداد مهره‌های باقیمانده هم‌نهشت با ۰ یا ۲ به پیمانه ۷ باشد. به عنوان مثال، اگر درون کیسه تعداد ۸۹ مهره داشته باشیم آنگاه این وضعیت یک وضعیت $N$ است و بازیکن اول می‌تواند با برداشتن ۳ مهره استراتژی برد را در اختیار خود بگیرد. ▲

## ۲-۳ تابع اسپراگ-گراندی

در این بخش به هر وضعیت در یک بازی یک مقدار عددی نسبت می‌دهیم که به نوع وضعیت‌های بازی مرتبط است. این کار با تعریف یک نگاشت روی گراف بازی انجام می‌شود.

**تعریف ۲-۳۳.** تابع اسپراگ-گراندی گراف جهت‌دار $G = (V, E)$، یک تابع $g : V \to \mathbb{Z}^{\geq 0}$ است به طوری که

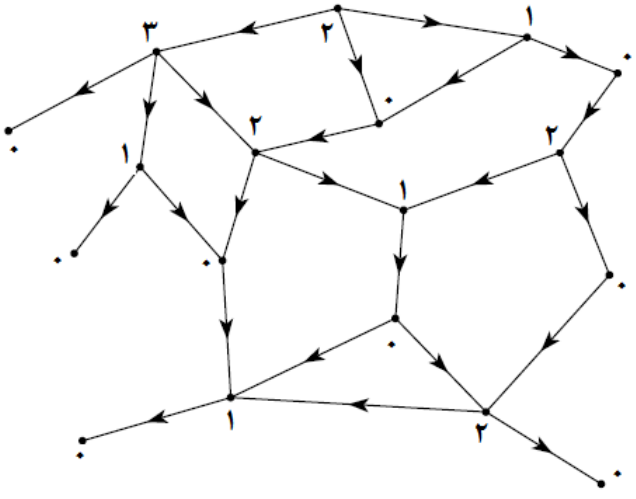
$$g(u) = \min\{n \mid n \geq 0,\ n \neq g(y),\ \forall y \in F(x)\}.$$

▲

به بیان دیگر، $g(u)$ کوچک‌ترین عدد صحیح نامنفی است که در بین مقادیر $g(u) = \operatorname{mex} g(F(u))$ اسپراگ-گراندی تالی‌های $u$ وجود ندارد و معمولاً می‌نویسیم

که در اینجا $\operatorname{mex} A$ نشان‌دهنده کوچکترین عدد صحیح نامنفی است که در مجموعه $A$ وجود ندارد.

**مثال ۲-۳۴.** مقادیر تابع اسپراگ-گراندی روی گراف زیر نوشته شده است.




▲

با استفاده از مقادیر تابع اسپراگ-گراندی می‌توان وضعیت‌های $P$ را تعیین کرد.

**قضیه ۲-۳۵.** در هر بازی ترکیبیاتی با تابع اسپراگ-گراندی $g$، وضعیت $u$ یک وضعیت $P$ است اگر و تنها اگر $g(u) = 0$.

**مثال ۲-۳۶.** بازی با قانون برداشتن ۱، ۲ یا ۳ مهره از درون یک کیسه را در نظر بگیرید. در این صورت برای هر عدد $k \geq 0$ ($k$ نشان‌دهنده تعداد مهره‌های درون کیسه است) داریم $g(k) = (k \bmod 4)$. پس وضعیت‌های $P$ در این بازی دقیقاً آن‌هایی هستند که مضرب ۴ باشند. ▲

## ۲-۴ جمع نیم و مجموع بازی‌ها

در این بخش یک مفهوم مهم به نام جمع نیم و سپس قضیه‌ای اساسی از اسپراگ و گراندی را در مورد مجموع بازی‌ها بیان می‌کنیم.

**تعریف ۲-۳۷.** فرض کنید $x$ و $y$ دو عدد صحیح نامنفی با نمایش دودویی $x = (x_m \cdots x_0)_2$ و $y = (y_m \cdots y_0)_2$ هستند. جمع نیم این دو عدد را با $x \oplus y$ نشان داده و برابر با

$$x \oplus y = (z_m \cdots z_0)_2$$

تعریف می‌کنیم که در اینجا داریم $z_k = x_k + y_k \pmod 2$. ▲

**مثال ۲-۳۸.**

$$۲۲ \oplus ۵۱ = (۱۰۱۱۰)_2 \oplus (۱۱۰۰۱۱)_2 = (۱۰۰۱۰۱)_2 = ۳۷.$$

▲

می‌توان نشان داد که جمع نیم دارای خواص جابجایی و شرکت‌پذیری است، عدد صفر عضو خنثی در این عمل است و برای هر عدد صحیح $x$ داریم $x \oplus x = 0$. به بیان دیگر، $(\mathbb{Z}^{\geq 0}, \oplus)$ یک گروه آبلی است. گزاره زیر می‌تواند در برخی موارد خاص محاسبه جمع نیم را ساده‌تر کند.

**گزاره ۲-۳۹.** جمع نیم هر عدد به فرم $2^n$ با یک عدد $x < 2^n$ برابر با جمع معمولی آن دو عدد است.

همواره می‌توان با در اختیار داشتن چند بازی ترکیبیاتی، یک بازی ترکیبیاتی جدید ایجاد کرد.در این بازی جدید، یک حرکت دقانونی عبارت است از انتخاب یک و تنها یکی از بازی‌ها و انجام تنها یک حرکت قانونی در آن بازی. این بازی که به مجموع بازی‌ها معروف است تا زمانی که همه بازی‌ها به یک وضعیت پایانی برسند ادامه خواهد یافت. اکنون قضیه زیر وضعیت‌های $P$ در مجموع چند بازی را تعیین می‌کند.

**قضیه ۲-۴۰. (قضیه اسپراگ-گراندی)** فرض کنید $G_1$، $G_2$، ... و $G_n$ بازی‌های ترکیبیاتی با توابع اسپراگ-گراندی $g_1$، $g_2$، ... و $g_n$ و $G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$

مجموع این بازی‌ها است. در این صورت برای هر وضعیت $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ در بازی $G$ داریم:

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n).$$

**مثال ۲-۴۱.** فرض کنید در یک بازی ۳ کیسه به ترتیب شامل ۱۰، ۱۳ و ۱۶ مهره در اختیار داریم. قانون بازی عبارت است از انتخاب کیسه ۱ و برداشتن ۱، ۲ یا ۳ مهره از آن یا انتخاب کیسه ۲ و برداشتن ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ مهره از آن یا انتخاب کیسه ۳ و برداشتن ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ یا ۷ مهره از آن است. این بازی را می‌توان به صورت مجموع سه بازی در نظر گرفت. به این ترتیب برای وضعیتی مانند $(9, 10, 14)$ داریم:

$$g(9, 10, 14) = g_1(9) \oplus g_2(10) \oplus g_3(14) = 1 \oplus 4 \oplus 6 = 3.$$

لذا این وضعیت یک وضعیت $N$ است و برای تبدیل آن به یک وضعیت $P$ می‌توان از کیسه سوم ۱ مهره خارج کرد. ▲

**مثال ۲-۴۲. (بازی گراندی)** بازی گراندی با تعدادی پشته لوبیا آغاز شده و در هر حرکت، بازیکن یک پشته را انتخاب نموده و آن را به دو پشته با تعداد نابرابر لوبیا تقسیم می‌کند. بدیهی است این بازی زمانی خاتمه می‌یابد که همه پشته‌ها حداکثر ۲ لوبیا داشته باشند.

در بازی گراندی، یک وضعیت کلی را می‌توان به فرم $P_a + P_b + P_c + \cdots$ تصور کرد که $P_x$ نماینده یک پشته حاوی $x$ لوبیا است. به این ترتیب یک حرکت قانونی انتخاب یک $P_h$ و جایگزین کردن آن با $P_i + P_j$ است به طوری که $0 < i, j < h$، $i + j = h$ و $i \neq j$. با توجه به قضیه اسپراگ-گراندی، برای وضعیت $P_a + P_b + \cdots$ داریم:

$$g(P_a + P_b + \cdots) = g(P_a) \oplus g(P_b) \oplus \cdots$$

پس محاسبه مقادیر تابع اسپراگ-گراندی برای بازی گراندی با تنها یک پشته دارای اهمیت است. جدول زیر این مقادیر را برای بازی گراندی با تنها یک پشته $n$-تایی نشان می‌دهد.

| n | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ⋯ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g(n) | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۲ | ۱ | ۰ | ۲ | ۱ | ۰ | ۲ | ۱ | ۳ | ۲ | ۱ | ⋯ |

برای نمونه، به سادگی می‌توان دید که وضعیت دو پشته‌ای با ۳ و ۶ لوبیا (یعنی وضعیت $P_۳ + P_۶$) یک وضعیت $P$ است زیرا

$$g(P_۳ + P_۶) = g(P_۳) \oplus g(P_۶) = ۱ \oplus ۱ = ۰.$$

▲

بازی گراندی یک نمونه از بازی‌های پشته‌ای است. یک موقعیت کلی در چنین بازی‌هایی به فرم $P_a + P_b + P_c + \cdots$ است و قواعد بازی با یک خانواده دلخواه از مجموعه‌های برگردان داده می‌شود. یک مجموعه برگردان را می‌توان به فرم

$$\{h, i, j, \cdots\}, \quad h > i > j > \cdots,$$

توصیف کرد. به این ترتیب یک حرکت قانونی عبارت است از جایگزینی هر جمله مانند $P_h$ با $P_i + P_j + \cdots$، مشروط بر آنکه $\{h, i, j, \cdots\}$ یک مجموعه برگردان باشد. در بازی گراندی مجموعه‌های برگردان عبارتند از $\{۳,۲,۱\}$، $\{۴,۳,۱\}$، $\{۵,۴,۱\}$، $\{۵,۳,۲\}$، $\{۶,۵,۱\}$، $\{۶,۴,۲\}$ و ... . دقت کنید که نوع هر وضعیت در این بازی‌ها نیز با استفاده از قضیه اسپراگ–گراندی تعیین می‌شود.

# فصل ۳

# کدهای ساخته شده از بازی‌های ترکیبیاتی

## ۳-۱ کدهای برنده

یک بازی پشته‌ای را در نظر بگیرید. همانگونه که پیشتر گفتیم، یک وضعیت کلی در چنین بازی‌ای به فرم

$$\sum_{i=0} n_i P_i,$$

است که $n_i$ نشان می‌دهد چند پشته $i$-تایی $P_i$ در آن وضعیت وجود دارد. به این ترتیب چنین وضعیتی را می‌توان با یک بردار صحیح مانند

$$(\cdots n_3 n_2 n_1),$$

نمایش داد. از آنجا که برای هر عدد صحیح $x$ داریم $x \oplus x = 0$، نتیجه چنین وضعیتی تنها به تعداد جفت‌های $n_i$ بستگی دارد. به این ترتیب، راهبرد برنده در یک کد دودویی ویژه نهفته است. این کد از تمام بردارهایی مانند

$$(\cdots c_3 c_2 c_1), \quad c_i = 0 \text{ یا } 1,$$

تشکیل شده است به طوری که $\sum_i \oplus c_i g(P_i) = ۰$. این کد را کد برنده بازی می‌نامیم.

**مثال ۳-۴۳.**

برای نمونه، در بازی گراندی تعدادی از کدکلمه‌ها و وضعیت‌های برنده متناظر با آن‌ها را در جدول زیر نمایش داده‌ایم. دقت کنید که با توجه به جدول مقادیر تابع اسپراگ-گراندی در بازی گراندی، بردار $(\cdots c_۳c_۲c_۱)$ یک کدکلمه است اگر و تنها اگر $c_۳ \oplus ۲c_۵ \oplus c_۶ \oplus ۲c_۸ \oplus \cdots = ۰$، یعنی $c_۱g(۱) \oplus c_۲g(۲) \oplus c_۳g(۳) \oplus \cdots = ۰$.

| اندازه پشته‌ها | کدکلمه |
|---|---|
| ۰ | ...۰۰۰۰۰۰۰ |
| ۱ | ...۰۰۰۰۰۰۱ |
| ۲ | ...۰۰۰۰۰۱۰ |
| ۲،۱ | ...۰۰۰۰۰۱۱ |
| ۴ | ...۰۰۰۱۰۰۰ |
| ۴،۱ | ...۰۰۰۱۰۰۱ |
| ۴،۲ | ...۰۰۰۱۰۱۰ |
| ۴،۲،۱ | ...۰۰۰۱۰۱۱ |
| ۶،۳ | ...۰۱۰۰۱۰۰ |
| ۷ | ...۱۰۰۰۰۰۰ |
| ... | ... |

▲

**مثال ۳-۴۴.** یک بازی پشته‌ای با مجموعه‌های برگردان $\{h, h-۳, ۳\}$، $h \geq ۶$، را در نظر بگیرید. به بیان دیگر، یک حرکت قانونی در این بازی انتخاب یک پشته با حداقل ۶ لوبیا و تقسیم آن به دو پشته است به گونه‌ای که یکی از پشته‌ها شامل ۳ لوبیا باشد. جدول

زیر مقادیر تابع اسپراگ–گراندی را برای یک بازی تک پشته‌ای با $n$ لوبیا نشان می‌دهد.

| n | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g(n) | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱ | ۱ | ۲ | ۲ | ۲ | ۱ | ۱ | ۱ | ۲ | ... |

همچون مثال قبل، یک بردار $(\cdots c_۳c_۲c_۱c_۰)$ یک کدکلمه است اگر و تنها اگر

$$۰ = c_۰g(۰) \oplus c_۱g(۱) \oplus c_۲g(۲) \oplus \cdots = c_۶ \oplus c_۷ \oplus c_۸ \oplus ۲c_۹ \oplus ۲c_{۱۰} \oplus .$$

در جدول زیر برخی از کدکلمات کد برنده را ملاحظه می‌کنید.

| اندازه پشته‌ها | کدکلمه |
|---|---|
| ۰ | ...۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ |
| ۱ | ...۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۰ |
| ۲ | ...۰۰۰۰۰۰۰۰۱۰۰ |
| ۳ | ...۰۰۰۰۰۰۰۱۰۰۰ |
| ۴ | ...۰۰۰۰۰۰۱۰۰۰۰ |
| ۵ | ...۰۰۰۰۰۱۰۰۰۰۰ |
| ۶،۷ | ...۰۰۰۱۱۰۰۰۰۰۰ |
| ۶،۸ | ...۰۰۱۰۱۰۰۰۰۰۰ |
| ۷،۸ | ...۰۰۱۱۰۰۰۰۰۰۰ |
| ۹،۱۰ | ...۱۱۰۰۰۰۰۰۰۰ |
| ... | ... |

▲

قضیه زیر حقیقتی زیبا نهفته در کدهای برنده است.

**قضیه ۳-۴۵.** کد برنده برای یک بازی پشته‌ای یک کد خطی روی میدان $F_۲$ است.

**اثبات.** فرض کنید $(\cdots c_۳c_۲c_۱)$ و $(\cdots c'_۳c'_۲c'_۱)$ دو کدکلمه از کد برنده هستند. در این صورت داریم:

$$\cdots \oplus c_۳g(۳) \oplus c_۲g(۲) \oplus c_۱g(۱) = ۰,$$
$$\cdots \oplus c'_۳g(۳) \oplus c'_۲g(۲) \oplus c'_۱g(۱) = ۰.$$

با جمع نیم دو تساوی بالا خواهیم داشت:

$$\cdots \oplus (c_۳ + c'_۳)g(۳) \oplus (c_۲ + c'_۲)g(۲) \oplus (c_۱ + c'_۱)g(۱) = ۰.$$

پس $(\cdots c_۳ + c'_۳\ c_۲ + c'_۲\ c_۱ + c'_۱)$ نیز یک کدکلمه از کد برنده است. از این رو کد برنده یک کد خطی روی میدان $F_۲$ است. ■

اگرچه کلمات تعریف شده در یک کد برنده دارای طول نامتناهی هستند، اما می‌توان با حذف بیت‌های $n$-ام به بعد یک کد با طول $n$ به دست آورد.

## ۳-۲ تعمیم به پایه $B$ و کدهای الفبایی

اکنون برآنیم تا یک تعریف مشابه از این بازی‌ها (و کدها) که در آن عدد ۲ با یک پایه دلخواه $B$ جایگزین می‌شود ارایه دهیم. برای این منظور، دقت کنید که بازی پشته‌ای در حالت کلی را می‌توان با اعداد دودویی $N = \sum c_i ۲^i$ انجام داد که در آن یک حرکت قانونی، جایگزینی عدد $N$ با عدد $N' = \sum c'_i ۲^i$ است به طوری که:
۱) $N' < N$،
۲) مجموعه $i$-هایی که $c_i \neq c'_i$ یک مجموعه برگردان باشد.

با این توصیف، می‌توان یک بازی پشته‌ای را با یک پایه $B$ و یک خانواده از مجموعه‌های برگردان متناهی به فرم

$$\{h, i, j, \cdots\}, \quad h > i > j > \cdots,$$

انجام داد. در این صورت یک وضعیت از بازی با یک عدد

$$N = \sum c_i B^i, \quad c_i \in \{۰, ۱, \cdots, B-۱\},$$

در پایه $B$ داده شده که می‌توان آن را متناظر با بردار

$$N = (\cdots c_۳ c_۲ c_۱), \quad c_i \in \{۰, ۱, \cdots, B-۱\},$$

در نظر گرفت. همچون قبل، یک حرکت قانونی در این بازی جایگزینی عدد $N$ با عددی مانند $N' = \sum c'_i B^i$ است به طوری که شرایط (۱) و (۲) مطرح شده در بالا برقرار باشند. به این ترتیب نظریه اسپراگ-گراندی برای این بازی‌ها نیز برقرار بوده و می‌توان کد برنده این بازی‌ها را مانند گذشته تعریف کرد.

برای هر خانواده از مجموعه‌های برگردان و هر پایه $B$، می‌توان کد دیگری با نام کد الفبایی تعریف کرد. این کد با الگوریتمی موسوم به الگوریتم دندان‌گرد [۱] تعریف می‌شود. در این الگوریتم هر کلمه $(\cdots c_۳ c_۲ c_۱)$ متناظر با عدد $N = \sum c_i B^i$ در نظر گرفته می‌شود. به این ترتیب، کلمه‌ای مانند $N$ یک کدکلمه است هرگاه کلمه کوچکتری همچون $N' = (\cdots c'_۳ c'_۲ c'_۱)$ موجود نباشد به طوری که مجموعه $i$-هایی که $c_i \neq c'_i$ یک مجموعه برگردان باشد. مجموعه $i$-هایی که $N$ و $N'$ متفاوت هستند را با نماد $\Delta(N, N')$ نمایش می‌دهیم.

قضیه زیر رابطه میان کدهای برنده و کدهای الفبایی را بیان می‌کند.

**قضیه ۳-۴۶.** برای هر مجموعه برگردان و برای هر پایه دلخواه، حرکت‌های برنده در بازی پشته‌ای حرکت به وضعیت‌هایی است که متناظر با یک کدکلمه در کد الفبایی باشند.

**اثبات.** اثبات را با استقرا روی $N$ (یعنی وضعیت) انجام می‌دهیم. دو مطلب را باید بررسی کرد. اگر $N$ یک کلمه از کد الفبایی نباشد آنگاه بایستی کدکلمه‌ای کوچک‌تر از $N$ مانند $N'$ موجود باشد به طوری که $\Delta(N, N')$ یک مجموعه برگردان است. پس، با توجه به فرض استقرا، حرکت از $N$ به $N'$ یک حرکت برنده است و $N$ یک وضعیت برنده نخواهد بود. از سوی دیگر، اگر $N$ یک کدکلمه از کد الفبایی و $N$ به $N'$ یک حرکت مجاز در بازی باشد، آنگاه $N' < N$ و $\Delta(N, N')$ یک مجموعه برگردان است. از آنجا که $N$ را به عنوان یک کدکلمه پذیرفته‌ایم، باید هر چنین $N'$ای را رد کرده باشیم که نشان می‌دهد حرکت از $N$ به $N'$ نمی‌تواند یک حرکت برنده باشد. لذا $N$ یک وضعیت برنده است و

[۱] greedy

اثبات کامل می‌شود. ■

**مثال ۳-۴۷.** فرض کنید $B = ۸$ و همه مجموعه‌ها با اندازه ۱ یا ۲ مجموعه‌های برگردان باشند. پس دو کدکلمه متمایز باید در حداقل سه مکان متفاوت باشند. با به کار بردن الگوریتم دندان‌گرد، درمی‌یابیم که کد الفبایی مورد نظر شامل کلمات

۰۰۰۰

۰۱۱۱

۰۲۲۲

...

۰۵۵۵

...

۰۷۷۷

۱۰۱۲

۱۱۰۳

... ,

خواهد بود. نکته جالب در این مثال آن است که این کد تحت جمع نیم بسته است. به عنوان مثال، $۱۴۵۶ = ۱۱۰۳ \oplus ۰۵۵۵$ یک کدکلمه از کد الفبایی است. ▲

**مثال ۳-۴۸.** به طور کلی، برای هر پایه $B$، اگر همه مجموعه‌ها با اندازه‌های ۱، ۲، ۳، ... و $d - ۱$ مجموعه‌های برگردان باشند آنگاه کد الفبایی متناظر دارای کمترین فاصله $d$ خواهد بود. ▲

**مثال ۳-۴۹.** برای $B = d = ۴$، کد الفبایی با کلمات زیر آغاز می‌شود:

۰۰۰۰۰۰

۰۰۱۱۱۱

۰۰۲۲۲۲

۰۰۳۳۳۳

۰۱۰۱۲۳

۰۱۱۰۳۲

۰۱۲۳۰۱

...

همچون مثال اول، این کد نیز تحت جمع نیم بسته است. ▲

**قضیه ۳-۵۰.** هرگاه $B = ۲$ آنگاه کد الفبایی تعریف شده با هر خانواده از مجموعه‌های برگردان یک کد خطی دودویی است.

این بخش را با تعمیم زیر از قضیه بالا به پایان می‌بریم.

**قضیه ۳-۵۱.** فرض کنید $B$ توانی از ۲ است. در این صورت کد الفبایی تعریف شده با هر خانواده از مجموعه‌های برگردان تحت جمع نیم مؤلفه به مؤلفه بسته است.

**اثبات.** تنها کافی است حالت $B = ۸$ را بررسی کنیم زیرا سایر حالت‌ها دارای اثبات کاملاً مشابهی خواهند بود. برای شروع، هر بردار ۸-تایی را با جایگزین کردن هر رقم ۸-تایی مانند $c_i$ با ارقام دودویی $c_{۳i+۲}c_{۳i+۱}c_{۳i}$ به یک بردار دودویی تبدیل می‌کنیم.

| $c_i$ | $c_{۳i+۲}$ | $c_{۳i+۱}$ | $c_{۳i}$ |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۲ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ۷ | ۱ | ۱ | ۱ |

به این ترتیب، بازی ۸-تایی اصلی به یک بازی دودویی تبدیل می‌شود که در آن $T$ یک مجموعه برگردان است تنها اگر

$$\{\lfloor \frac{i}{۳} \rfloor \mid i \in T\},$$

یک مجموعه برگردان در بازی ۸-تایی باشد. اکنون نتیجه مطلوب از به کار بردن قضیه ۳-۵۰ برای کد دودویی جدید حاصل می‌شود. ■

## ۳-۳ کدهای الفبایی

در این بخش، برخی از کدهای الفبایی را با جزئیات بیشتر مورد بررسی قرار می‌دهیم. ما پایه $B$ و کمترین فاصله $d$ را مشخص نموده و همه مجموعه‌ها با اندازه ۱، ۲، ... و $d-1$ را به عنوان مجموعه‌های برگردان در نظر می‌گیریم. در این صورت با کلمه صفر آغاز نموده و به صورت مکرر اولین کلمه از منظر فرهنگ واژگان که فاصله همینگ آن با همه کلمات قبلی حداقل $d$ باشد را به کد اضافه می‌کنیم.

می‌توان نشان داد که هرگاه $B = ۲^{a}$ آنگاه کد الفبایی یک کد خطی روی میدان $GF(B)$ است. به علاوه دقت کنید که با در نظر گرفتن همه کدکلماتی که پس از آخرین $n$ مکانشان صفر هستند، یک کد با طول $n$ حاصل می‌شود.

پارامترهای کدهای الفبایی در جداول ۱ تا ۴ نمایش داده شده است. جدول‌های ۱، ۲ و ۳ تعداد کدکلمات در کد الفبایی با $d = ۳$، $d = ۴$ و $d = ۶$ را برای پایه‌ها و طول‌های مختلف نشان می‌دهند در حالی که جدول ۴ بعد $k$ را برای کدهای الفبایی دودویی با $n \leq ۴۴$ و $d \leq ۱۰$ را مشخص می‌کند.

| $n\backslash B$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 16 | 17 |
| 4 | 2 | 9 | 16 | 17 | 22 | 25 | 32 | 48 | 70 | 187 | 256 | 257 |
| 5 | 4 | 9 | 64 | 74 | 112 | 182 | $2^{8}$ | 372 | 532 | | | |
| 6 | 8 | 24 | 64 | 265 | 618 | 1175 | $2^{11}$ | | | | | |
| 7 | 16 | 72 | $2^{8}$ | 1113 | 2994 | | $2^{14}$ | | | | | |
| 8 | 16 | 198 | $2^{10}$ | | | | $2^{17}$ | | | | | |
| 9 | 32 | 519 | $2^{12}$ | | | | $2^{20}$ | | | | | |
| 10 | 64 | 1390 | $2^{14}$ | | | | $2^{23}$ | | | | | |
| 11 | 128 | 3650 | $2^{16}$ | | | | $2^{25}$ | | | | | |

**شکل ۳-۱:** تعداد کدکلمات در کد الفبایی با پایه $B$، طول $n$ و کمترین فاصله $d = ۳$

| $n\backslash B$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 2 | 3 | 16 | 17 | 18 | 27 | 32 | 33 | 46 |
| 6 | 4 | 10 | 64 | 67 | 88 | 147 | $2^8$ | 314 | 446 |
| 7 | 8 | 24 | 64 | 165 | 390 | 766 | $2^{11}$ | | |
| 8 | 16 | 60 | $2^8$ | 676 | | | $2^{14}$ | | |
| 9 | 16 | 136 | $2^{10}$ | | | | $2^{16}$ | | |
| 10 | 32 | 334 | $2^{12}$ | | | | $2^{19}$ | | |
| 11 | 64 | 807 | $2^{14}$ | | | | $2^{22}$ | | |

**شکل ۳-۲:** تعداد کدکلمات در کد الفبایی با پایه $B$، طول $n$ و کمترین فاصله $d = ۴$

| $n\backslash B$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 7 | 2 | 3 | 4 | 5 | 12 | 25 | 32 |
| 8 | 2 | 9 | 16 | 33 | 58 | 95 | 256 |
| 9 | 4 | 17 | 64 | 99 | 222 | | |
| 10 | 4 | 29 | 256 | | | | |
| 11 | 8 | 59 | | | | | |
| 12 | 16 | 124 | | | | | |
| 13 | 16 | 269 | | | | | |

**شکل ۳-۳:** تعداد کدکلمات در کد الفبایی با پایه $B$، طول $n$ و کمترین فاصله $d = ۶$

## ۳-۴ برخی از کدهای مشهور

در این بخش تعدادی از کدهای مشهور که کد الفبایی نیز هستند را معرفی می‌کنیم.

۱) کدهای مجموع صفر: برای $d = ۲$ و هر $B$، کد الفبایی با طول $n$ یک کد مجموع-صفر است که از تمام بردارهای

$$(c_{n-۱}c_{n-۲}\cdots c_۲c_۱),$$

که جمع نیم $c_i$ها صفر است تشکیل شده است. برای مثال، در حالت دودویی، این همان کد وزن‌های زوج است.

۲) کدهای همینگ: برای $B = ۲$ و $d = ۳$، مجموعه‌های برگردان دارای اندازه ۱ یا ۲ هستند و بازی ما بازی نیم است (در این بازی هر بازیکن در نوبت خود یک پشته را

| $n\backslash d$ | 4 | 6 | 8 | 10 | $n\backslash d$ | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 25 | 19 | 14 | 12 | 7 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 26 | 20 | 15 | 12 | 8 |
| 6 | 2 | 1 | 0 | 0 | 27 | 21 | 16 | 12 | 9 |
| 7 | 3 | 1 | 0 | 0 | 28 | 22 | 17 | 13 | 9 |
| 8 | 4 | 1 | 1 | 0 | 29 | 23 | 18 | 13 | 10 |
| 9 | 4 | 2 | 1 | 0 | 30 | 24 | 19 | 14 | 11 |
| 10 | 5 | 2 | 1 | 1 | 31 | 25 | 19 | 15 | 12 |
| 11 | 6 | 3 | 1 | 1 | 32 | 26 | 20 | 16 | 12 |
| 12 | 7 | 4 | 2 | 1 | 33 | 26 | 21 | 16 | 13 |
| 13 | 8 | 4 | 2 | 1 | 34 | 27 | 22 | 17 | 14 |
| 14 | 9 | 5 | 3 | 1 | 35 | 28 | 23 | 18 | 14 |
| 15 | 10 | 6 | 4 | 2 | 36 | 29 | 24 | 19 | 15 |
| 16 | 11 | 7 | 5 | 2 | 37 | 30 | 25 | 20 | 16 |
| 17 | 11 | 8 | 5 | 2 | 38 | 31 | 26 | 21 | 17 |
| 18 | 12 | 9 | 6 | 3 | 39 | 32 | 27 | 22 | 17 |
| 19 | 13 | 9 | 7 | 3 | 40 | 33 | 27 | 23 | 18 |
| 20 | 14 | 10 | 8 | 4 | 41 | 34 | 28 | 23 | 19 |
| 21 | 15 | 11 | 9 | 5 | 42 | 35 | 29 | 24 | 20 |
| 22 | 16 | 12 | 10 | 5 | 43 | 36 | 30 | 25 | 21 |
| 23 | 17 | 12 | 11 | 6 | 44 | 37 | 31 | 26 | 21 |
| 24 | 18 | 13 | 12 | 6 | | | | | |

**شکل ۳-۴:** بعد $k$ برای $[n, k, d]$-کدهای الفبایی با $n \leq ۴۴$ و $d \leq ۱۰$

انتخاب نموده و از آن پشته حداقل یک لوبیا و حداکثر همه لوبیاها را برمی‌دارند). در این حالت، کدهای الفبایی متناظر با طول $n = ۲^m - ۱$ با کدهای همینگ دودویی مطابقت دارند و آن‌ها که طول دیگری دارند، کدهای همینگ کوتاه شده هستند. به طور مشابه، برای $B = ۲$، $d = ۴$ و $n = ۲^m$ کدهای همینگ توسیع‌یافته حاصل می‌شوند.

۳) کدهای دودویی توسیع‌یافته: برای $B = ۲$، کدهای الفبایی با $d$ زوج از کدهای الفبایی با $d$ فرد با اضافه کردن یک بیت کنترل تساوی به دست می‌آیند. این معادل با قضیه لاک‌پشت مک [۱] است. پس برای $B = ۲$ تنها کافی است که مقادیر زوج $d$ در نظر گرفته شوند.

۴) کد باقیمانده مربع توسیع‌یافته با طول ۱۸: کد الفبایی با $B = ۲$، $d = ۶$ و $n = ۱۸$ همان $[۱۸, ۹, ۶]$-کد باقیمانده مربع توسیع‌یافته دودویی است. بازی متناظر موبیوس نام دارد.

۵) کد گلی توسیع‌یافته: کد الفبایی با $B = ۲$، $d = ۸$ و $n = ۲۴$ همان $[۲۴, ۱۲, ۸]$-کد گلی دودویی است. بازی متناظر مگل [۲] نام دارد.

---

[۱] Mock Turtle [۲] Mogul

## ۳-۵ حالت $B = ۲^a$

برای $B = ۲^a$ می‌توان کد الفبایی را به صورتی مؤثر با مقادیر یک تابع $f(\xi, i)$ مشخص کرد ($f(\xi, i)$ مقدار تابع اسپراگ-گراندی در وضعیتی است که تنها یک رقم ناصفر $c$، $۰ \le \xi \le B - ۱$، در مکان $i$-ام قرار دارد). برای سادگی معمولاً مقادیر $f(\xi, i)$ را در پایه $B$ می‌نویسند.

برای نمونه، وقتی $B = ۸$ و $d = ۳$، مقادیر $f(\xi, i)$ در شکل زیر نشان داده شده است (مقادیر در مبنای ۸ هستند).

| $i \setminus \xi$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 000 | 001 | 002 | 003 | 004 | 005 | 006 | 007 |
| 1 | 000 | 010 | 020 | 030 | 040 | 050 | 060 | 070 |
| 2 | 000 | 011 | 022 | 033 | 044 | 055 | 066 | 077 |
| 3 | 000 | 012 | 023 | 031 | 100 | 112 | 123 | 131 |
| 4 | 000 | 013 | 021 | 032 | 104 | 117 | 125 | 136 |
| 5 | 000 | 014 | 042 | 056 | 101 | 115 | 143 | 157 |
| 6 | 000 | 015 | 041 | 054 | 105 | 110 | 144 | 151 |
| 7 | 000 | 016 | 045 | 053 | 107 | 111 | 142 | 154 |
| 8 | 000 | 017 | 046 | 051 | 103 | 114 | 145 | 152 |
| 9 | 000 | 024 | 043 | 067 | 102 | 126 | 141 | 165 |
| 10 | 000 | 025 | 047 | 062 | 200 | 225 | 247 | 262 |

**شکل ۳-۵:** مقادیر $f(\xi, i)$ در حالت $B = ۸$، $d = ۳$ که در مبنای ۸ نوشته شده‌اند.

اجازه دهید برای تبیین بهتر این شکل، $f(۲, ۳)$ را محاسبه کنیم. از وضعیت $(\cdots ۰ ۲ ۰ ۰ ۰)$ می‌توان به هر یک از وضعیت‌های

$$(\cdots \circ x \circ \circ y)$$
$$(\cdots \circ x \circ y \circ)$$
$$(\cdots \circ x\ y \circ \circ),$$

حرکت کرد که در آن داریم $x = ۰, ۱$ و $y = ۰, ۱, \cdots, ۷$ (زیرا مجموعه‌های برگردان دارای اندازه‌های ۱ و ۲ هستند). به این ترتیب $f(۲, ۳)$ برابر با

$$\operatorname{mex} \begin{cases} f(۰, ۳) \oplus abc = ۰۰۰ \oplus abc \\ f(۱, ۳) \oplus abc = ۰۱۲ \oplus abc \end{cases}$$

خواهد بود که $abc = f(y,۰)$ یا $abc = f(y,۱)$ یا $abc = f(y,۲)$ یکی از درایه‌ها از سه سطر اول شکل ۳-۵ است. اکنون به سادگی می‌توان دید که اولین عدد هشت‌تایی که به فرم روابط بالا نیست، عدد ۰۲۳ است.

خاصیت جمعی نتیجه می‌دهد که ستون‌های متناظر با $\xi = ۱$، $\xi = ۲$ و $\xi = ۴$ دیگر مقادیر را مشخص می‌کنند. برای مثال، یک عنصر نوعی از از ستون $\xi = ۶$ جمع نیم درایه‌ها در ستون‌های ۲ و ۴ است.

همانگونه که پیشتر گفتیم، کدکلمات وضعیت‌هایی هستند که مقدار تابع اسپراگ-گراندی در آن‌ها برابر با صفر است. در انتها، با ارایه یک مثال، نشان می‌دهیم که چگونه این کدکلمات از روی مقادیر $f(\xi, i)$ تعیین می‌شوند. ابتدا این پرسش را مطرح می‌کنیم که برای کدام مقادیر $x$ و $y$،

$$\ldots\circ\ldots\circ۲۰xy,$$

یک کدکلمه است؟ از آنجا که

$$f(۲,۳) = ۰۲۳ \quad f(x,۱) = \circ x\circ \quad f(y,\circ) = \circ\circ y,$$

پاسخ $x = ۲$ و $y = ۳$ است، یعنی

$$\ldots\circ\ldots\circ۲۰۲۳.$$

# مراجع


[1] Berlekamp E. R., Conway J. H., and Guy R. K., *Winning Ways*, 2 vols. New York: Academic, 1982.

[2] Conway J. H., *On Numbers and Games*, New York: Academic, 1976.

[3] Conway J. H. and Sloane J. A., *Lexicographic Codes: Error-Correcting Codes from Game Theory*, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. IT-32, No. 3, MAY 1986.